

## **Математическая модель перемешивания на основе двухслойной модели турбулентного пограничного слоя**

Синявский Ю.В.

melter@mail.ru

Филиал МЭИ в г. Смоленске

*В статье рассматривается модель перемешивания, использующая для расчета момента сил со стороны корпуса аппарата двухслойную модель пограничного слоя. Для лопастной мешалки показана возможность определения констант модели с использованием экспериментальных данных, приведенных в литературе.*

Ключевые слова: перемешивание, турбулентность, лопастная мешалка.

## **Mathematical model of mixing, based on two-layer turbulence model**

Sinyavskiy Y.V. melter@mail.ru

The Smolensk branch of the National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

*The model of impeller based on two-layer turbulence model for evaluation wall toeque is presented. Parameters of this model can be estimated by using experimental dates. Application of the model for pitch-blade impeller is analised as an example.*

Key words: Mixing, turbulence, pitch-blade impeller

Активное использование в пищевых продуктах биологически активных компонентов, наблюдающееся в последнее время, приводит к сближению требований безопасности пищевых производств и фармацевтической промышленности. При применении стандарта безопасности НАССР перемешивание стало рассматриваться как «критическая точка», а обеспечению заданной степени однородности стало уделяться повышенное внимание [1]. Одним из мероприятий, направленных на устранение опасности при перемешивании является определение соответствия реальной степени перемешивания заданной.

В качестве меры интенсивности перемешивания на микроуровне часто выступают величины, характеризующие микромасштаб турбулентного

переноса в аппарате с мешалкой, такие как колмогоровские длина  $l_k$  и время  $t_k$ , определяемые как [2]

$$l_k = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$$

$$t_k = \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $\varepsilon$  — диссипация энергии в единице массы.

В настоящее время определение интенсивности диссипации энергии может быть проведено экспериментально, с использованием химических методов или лазерной доплерографии, или с помощью численного моделирования процессов перемешивания в рамках вычислительной гидродинамики [2],[3].

Однако обе этих группы методов являются достаточно сложными и дорогостоящими, что делает их малоприменимыми в производственной практике.

Таким образом, имеется необходимость в разработки математической модели, являющейся достаточно простой, и одновременно, обеспечивающей оценку параметров микромасштабной турбулентности.

В настоящее время, в основе расчета перемешивающих устройств в России лежит методика, разработанная в начале 80-х годов двадцатого века. Наиболее полное ее изложение приведено в [4].

В ее основе лежит утверждение о равенстве моментов, проложенных к жидкости со стороны перемешивающего органа  $T_{ep}$  и сил сопротивления со стороны ограждающих поверхностей и внутренних неподвижных устройств  $T_k$ :

$$T_{ep} - T_k = 0 \quad (1)$$

При этом момент сил сопротивления со стороны корпуса при отсутствии внутренних устройств, вычисляется как

$$T_k = 2\pi R^2 H \tau$$

где  $R$  — радиус корпуса аппарата,  $H$  — высота жидкости в аппарате  $\tau$  — касательное напряжение на корпусе аппарата.

Данная модель является достаточно простой для реализации и одновременно обладает потенциалом для развития, как это сделано, например

в известном программном продукте Turbulent™ 2Кх компании **VisiMix Ltd** [5].

Подход, позволяющий анализировать микромасштабную турбулентность, так же представлен в [4], и базируется на оценке параметров турбулентного пограничного слоя с помощью гипотезы Левича-Ландау о характере изменения турбулентной вязкости, что позволяет ввести удельную диссипацию энергии в выражение для касательного напряжения на стенке корпуса аппарата:

$$\tau = 0,144 \bar{\varepsilon} \nu^{0.25} v(R)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  — средняя удельная диссипация энергии в аппарате.

Важно отметить, что в более точной модели вместо должно стоять значение удельной диссипации энергии вблизи стенки аппарата, которое существенно меньше  $\bar{\varepsilon}$  [3].

Попытка учета результатов новых исследований [3] в этом направлении приводит к существенному занижению значения момента сопротивления со стороны корпуса.

Для построения уточненной модели сопротивления корпуса будем использовать общепринятую в настоящее время двухслойную модель.

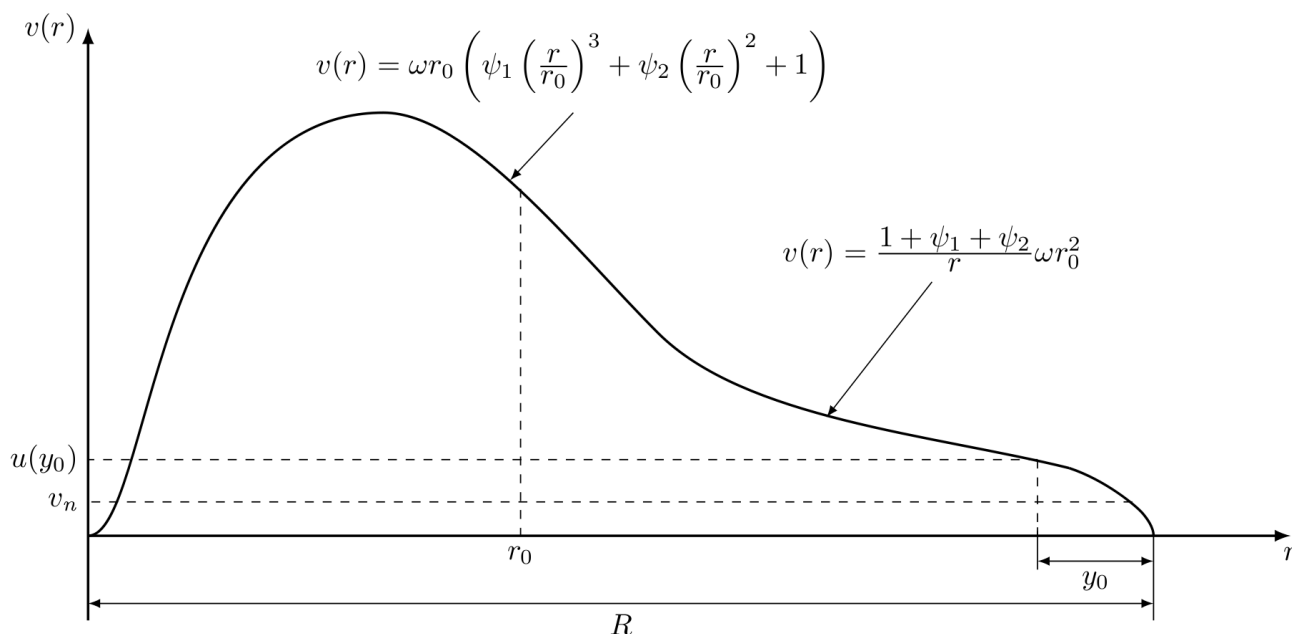


Рис.1: Радиальное распределение тангенциальной составляющей скорости в аппарате с мешалкой

Будем считать, что непосредственно к стенке аппарата примыкает вязкий

подслоем толщиной  $\delta$  на внешней границе которого скорость равна  $v_n$ . За пределами вязкого подслоя располагается область с логарифмическим распределением скорости:

$$u(y) = v_i + \frac{u_0}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

где  $k$  — универсальная постоянная Прандтля, а координата  $y$  отсчитывается от стенки по направлению нормали к ней.

За пределами пограничного слоя распределение скорости соответствует традиционным представлениям [4] и описывается законом

$$v(r) = \frac{1 + \psi_1 + \psi_2}{r} \omega r_0^2$$

где  $r_0 = d/2$  — радиус перемешивающего устройства,  $\omega$  — угловая скорость вращения перемешивающего устройства.

Согласование между распределением скорости в ядре потока и пограничном слое (рис.1.) осуществляется с использованием следующих допущений:

1. На границе между вязким подслоем и основным потоком, соответствующей координате  $y_0$  значения скорости одинаковы:

$$\frac{1 + \psi_1 + \psi_2}{R - y_0} \omega r_0^2 = v_i + \frac{u_0}{\kappa} \ln\left(\frac{y_0}{\delta}\right) \quad (2)$$

2. Производные скорости на границе вязкого слоя и основного потока так же равны:

$$\frac{1 + \psi_1 + \psi_2}{R - y_0} \omega r_0^2 = \frac{u_0}{\kappa} \frac{1}{y_0} \quad (3)$$

3. Толщина вязкого подслоя подслоя может быть определена из выражения

$$\delta = \frac{k_\delta v}{u_0} \quad (4)$$

4. Скорость на границе вязкого подслоя может быть найдена из закона Колмагорова-Обухова:

$$v_n = 1,5 k_\varepsilon \varepsilon \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{4Eu n^3 d^5}{D^2 H}, \quad (6)$$

а коэффициент  $k_\varepsilon < 1$  показывает связь между локальной диссипацией энергии вблизи стенки аппарата со средней по аппарату.

Преобразовывая систему уравнений (2)-(5), получим нелинейное уравнение относительно  $u_0$ :

$$u_0 \kappa \ln \left( \frac{u_0 y_0}{k_\delta v} \right) + \kappa_\delta \left( \frac{k_\delta k_\varepsilon \varepsilon v}{u_0} \right)^{1/3} = \frac{1 + \psi_1 + \psi_2}{R - y_0} \omega r_0^2$$

где  $y_0$  определяется по формуле:

$$y_0 = \frac{-\sqrt{4\kappa u_0 (1 + \psi_1 + \psi_2) R + \kappa^2 (1 + \psi_1 + \psi_2)^2} - 2u_0 R - \kappa (1 + \psi_1 + \psi_2)}{2u_0}$$

Учитывая, что

$$u_0 = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}},$$

получим для момента сил сопротивления корпуса выражение:

$$T_\varepsilon = \frac{\pi}{2} \rho D^2 H u_0^2$$

Как показано в [4] примем, что момент со стороны дна аппарата составляет порядка 1/8 от момента сопротивления стенок аппарата. Тогда, полный момент сил сопротивления может быть представлен в виде:

$$T_\varepsilon \psi_1, \psi_2 = \frac{9\pi}{16} \rho D^2 H u_0^2 \psi_1, \psi_2^2 \quad (7)$$

Момент, приложенный к жидкости со стороны лопастей перемешивающего устройства, в случае если  $D/d < 1,5$  и скорость жидкости в центральной зоне аппарата описывается соотношением:

$$v r = \omega r_0 \left( \psi_1 \left( \frac{r}{r_0} \right)^3 + \psi_2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + 1 \right) \quad (8)$$

может быть вычислен [4]:

$$T_{\omega} = \frac{z_i \zeta_i \rho \omega^2 r_0^5}{2} (0,1\psi_1^2 + 0,222\psi_1\psi_2 + 0,125\psi_2^2) \quad (9)$$

где  $z_m$  — число перемешивающих устройств на валу,  $\zeta_m$  — коэффициент сопротивления мешалки.

Коэффициенты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  связаны между собой соотношением:

$$\psi_2 = -0,5 - 1,25\psi_1 \quad (10)$$

Подстановка (7) и (8) в (1) вместе с (9) приводит к системе уравнений относительно коэффициентов  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , что позволяет вычислить мощность на привод перемешивающего устройства  $N$  как

$$N = \omega \cdot T_{a\omega}$$

и связанный с ним безразмерный параметр  $Eu$  как

$$Eu = \frac{N}{\rho n^3 d^5}.$$

Производя расчет при различных значениях частоты вращения при заданной геометрии системы мешалка-корпус, можно получить характеристику мешалки  $Eu(Re)$ , являющуюся одним из основных параметров аппарата для перемешивания.

Расчет момента сопротивления корпуса по уравнению (7) делает расчетную модель существенно нелинейной, и требует для решения использования итерационных методов с релаксацией. Тем не менее, затраты вычислительных ресурсов остаются на низком уровне, что позволяет легко производить расчет характеристики системы мешалка-сосуд  $Eu(Re)$  при любом наборе исходных геометрических параметров.

Коэффициенты  $k_\varepsilon$  и  $k_\delta$  не могут быть определены теоретически, однако наличие в модели в качестве используемых параметров значений  $Eu$ , имеется возможность использовать для их поиска имеющиеся в литературе данные, которые являются общепринятыми.

Поставим задачу отыскания такого набора  $k_\varepsilon$  и  $k_\delta$ , при котором достигается максимальное соответствие между результатами расчета и экспериментальными данными. Следует отметить, представленные в литературе данные как правило получены в результате обработки результатов эксперимента с учетом соответствующих погрешностей. Поэтому добиваться полного совпадения результатов расчетной методики с ними бессмысленно. Тем не менее, необходимо стремиться к тому, чтобы результаты численного моделирования имели близкие значения, и, что более важно, расхождение было приблизительно одинаковым для всей области экспериментальных

данных.

Для оценки степени отклонения расчетных результатов от экспериментальных будет использоваться целевую функцию, определяемую следующим образом:

$$\Theta = \frac{P}{6} \left( A^2 + \frac{E^2}{4} \right),$$

где  $P$  — число расчетных точек, а вспомогательные величины  $A$  и  $E$  рассчитываются по формулам:

$$A = \frac{P^{3/2}}{P} \frac{\sum_{i=1}^P \Delta^3}{\left( \sum_{i=1}^P \Delta^2 \right)^{3/2}}$$

$$E = P \frac{\sum_{i=1}^P \Delta^4}{\left( \sum_{i=1}^P \Delta^2 \right)^2} - 3$$

где  $\Delta$  — абсолютное отклонение расчетного значения от теоретического, определенного при том же значении  $Re$ .

Вид предложенной целевой функции базируется на известном статистическом критерии Жака-Бара, значение которого служит для проверки нормальности распределения в выборке. Целью вычислительного эксперимента является определение таких значений параметров  $k_\epsilon$  и  $k_\delta$  при которых  $\Theta$  принимает минимальное значение.

Для решения поставленной задачи учитывая сложный характер искомой функции, будем использовать алгоритм Нелдера-Мида, имеющий высокие показатели сходимости.

Применим представленную выше методику к анализу процессов перемешивания в цилиндрическом аппарате с двухлопастной мешалкой. Большой объем экспериментальных данных, представленных графическими и аналитическими зависимостями представлен в [7].

Для расчета использовался интервал чисел Рейнольдса  $Re=3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$ , соответствующий турбулентному режиму течения.

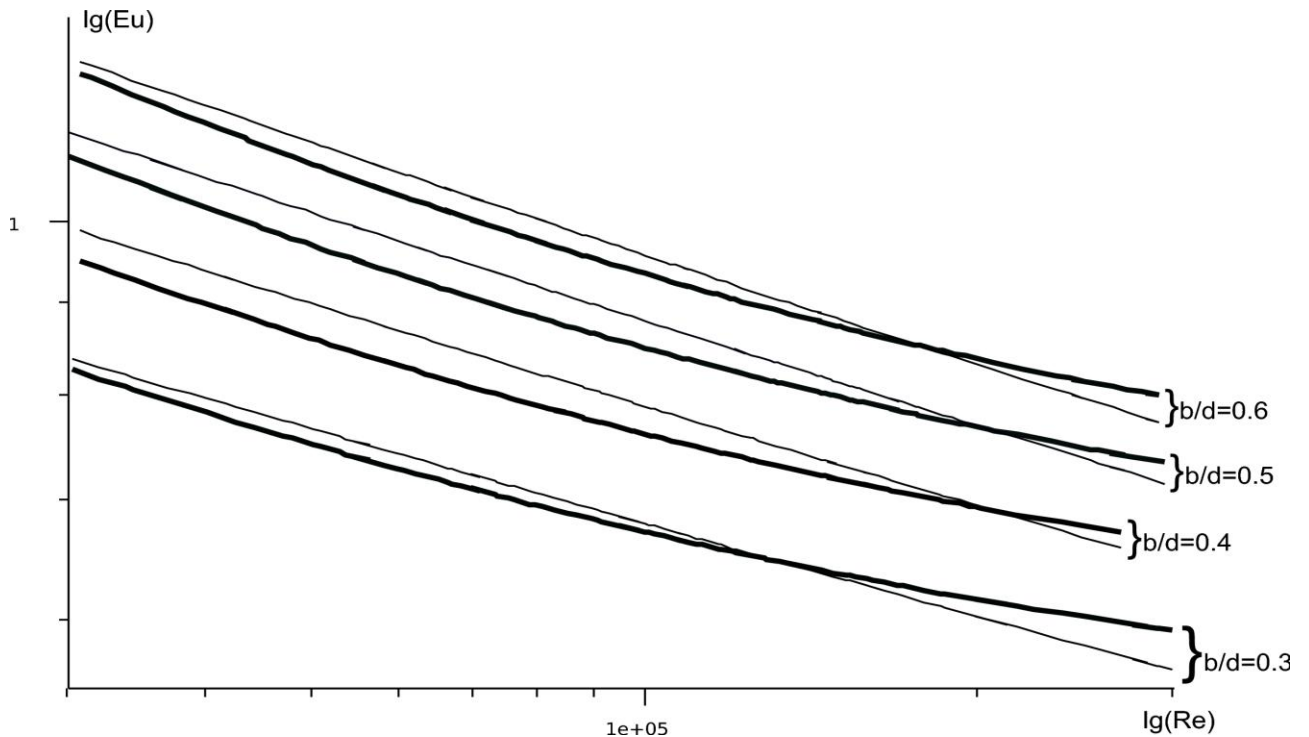


Рис.2. Расчетные и экспериментальные значения по результатам исследования двухлопастной мешалки в цилиндрическом корпусе при  $d/D=0,3$  и различных значения  $b/d$ .

Жирные линии соответствуют экспериментальным данным [6], тонкие линии — расчетным значениям. Все расчетные линии соответствуют значениям коэффициентов  $k_\epsilon = 0,095$  и  $k_\delta = 32,1$ . Максимальная относительная ошибка расчетных данных составляет около 4%.

Аналогичные по сути вычислительные эксперименты, направленные на поиск значений коэффициентов  $k_\epsilon$  и  $k_\delta$  были проведены для других отношений  $0,25 < d/D < 0,6$ . Выбор меньшего значения  $d/D=0,25$  обусловлен диапазоном экспериментальных данных, приведенных в [6], а верхняя граница диапазона обусловлена указанной в [4] границей применимости модели поля тангенциальной составляющей скорости, описываемой соотношениями (8),(9).

По результатам вычислительных экспериментов можно сделать два вывода:

1. С достаточной точностью значение коэффициента  $k_\epsilon = 0,10$  можно считать постоянным.
2. С ростом отношения  $d/D$  значение коэффициента  $k_\delta$  убывает, принимая при  $d/D=0,6$  значение  $k_\delta = 18,0$ .

Таким образом, модель в первом приближении для рассматриваемого случая можно считать однопараметрической, что упрощает поиск коэффициента  $k_\delta$ .



Предложенная модель вычисления момента сил сопротивления корпуса с использованием двухслойной модели турбулентного пограничного слоя и вычислением ее коэффициентов с помощью экспериментальных данных, известных из литературных источников показала свою перспективность. Наличие в современной литературе большого количества данных о зависимости  $Eu(Re)$  для разнообразных перемешивающих устройств, позволяет без проведения непосредственного эксперимента оценивать значение удельной диссипации энергии вблизи стенки аппарата, что в дальнейшем, позволяет определить распределение диссипации энергии во всем аппарате.

### Список литературы

1. Food mixing : principles and applications [Текст] /P.J. Cullen [et al] — Blackwell Publishing Ltd , 2009 — 320 p. — ISBN 978-1-4051-7754-2
2. Paul, Edward L. Handbook of industrial mixing : science and practice [Текст]/ Edward L. Paul — Blackwell Publishing Ltd , 2004 — 1432 p— ISBN 0-471-26919-0,
3. Assirelli, W. Study Of Micromixing in a Stirred Tank Using a Rushton Turbine: Comparison of Feed Positions and Other Mixing Devices [Текст]/ W.Assirelli, A. Bujalski, W. Nienow, A. Eaglesham — Chemical Engineering Research and Design — 2002 — Vol.80, Issue 8 — p. 855-863
4. Брагинский, Л.Н. Перемешивание в жидких средах.[Текст]/ Л.Н. Брагинский В.И. Бегачев, В.М.Барабаш. — Л.: «Химия», 1984. — 336 с.
5. Review of the Main Mathematical Models Used in VisiMix [Электронный ресурс]/ VisiMix Ltd, Jerusalem , Israel — URL:<http://www.visimix.com/visimix-support/visimix-scientific-background/>
6. Стренк, Ф. Перемешивание и аппараты с мешалками [Текст]/Ф. Стренк— Польша 1971, пер. с польского под ред. Шупляка И.А. — Л.: «Химия», 1975 — 384 с.