

## **Математическое описание совместного тепломассопереноса при инфракрасном нагреве морской капусты**

**Б. А. ВОРОНЕНКО, С. Ф. ДЕМИДОВ, Д. А. ОБODOV**  
[demidovserg@mail.ru](mailto:demidovserg@mail.ru)

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО  
Институт холода и биотехнологий  
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

*Поставлена и решена аналитически задача совместного тепло- и массопереноса при инфракрасном нагреве морской капусты.*

**Ключевые слова:** Инфракрасный нагрев, тепломассоперенос, математическое описание, водоросли.

---

## **Mathematical description of heat and mass transfer of seaweed by infrared heating**

**B. A. VORONENKO, S. F. DEMIDOV, D. A. OBODOV**

*National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics  
Institute of Refrigeration and Biotechnologies  
191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9*

*Solve the problem of sharing heat and mass transfer in infrared heating seaweed.*

**Key words:** infrared heating, heat and mass transfer, mathematical description, algae.

---

Использование энергии электромагнитного поля инфракрасного (ИК) диапазона является одним из эффективных путей интенсификации тепловой обработки пищевых материалов, позволяющих значительно сократить длительность процесса и повысить качество готовых изделий.

Н.С. Михеевой [4] показано, что углубление поверхности испарения имеет место с начала процесса сушки в среде с низкой относительной влажностью. При подсушке с поверхности материала удаляется влага смачивания (механически удерживаемая вода), что способствует равномерному прогреву продукта.

При составлении математической модели процесса термической обработки конвективным теплообменом от окружающего воздуха пренебрегаем, причем, чем выше температура источника радиационного излучения, тем обоснованнее эта предпосылка [1]. Экспериментально показано, что плотности теплового потока и потока массы вещества через поверхность материала во время процесса нагрева остаются постоянными.

Лучистый поток по мере проникновения в продукт быстро затухает [2], и можно считать, что вся энергия инфракрасного излучения отдается поверхности и в нагреве внутренних слоев не участвует.

В этом случае затухание лучистого потока, проникающего в продукт, может быть описано параболическим законом изменения удельной энергии (мощности электромагнитного поля) от координаты [5, 6]:

$$w(x) = w_0 \frac{x^2 - \lambda_{np}^2}{R^2 - \lambda_{np}^2} \quad 0 < \lambda_{np} \leq x \leq R \quad (1)$$

Принимаем слой морской капусты за тело основной геометрической формы – неограниченную пластину, теплофизические характеристики которой в процессе нагрева не изменяются.

При ИК-облучении нагрев происходит с поверхности, а внутренним слоям теплота передается теплопроводностью и концентрационной теплопроводностью. На основании многих экспериментальных данных [2] не будем учитывать процесс термодиффузии влаги, то есть изменение влагосодержания за счет термовлагопроводности, и также примем во внимание сравнительно медленное изменение влагосодержания со временем при ИК-нагреве [7].

С учетом указанных допущений опишем нагрев морской капусты следующей краевой задачей совместного тепло- и массопереноса.

Требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных совместного тепло- и массопереноса для однородного изотропного капиллярно-пористого тела [8]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_q \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{w(x)}{c_q \gamma_0}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (3)$$

$$\tau > 0, 0 < x < R$$

при следующих условиях:

$$t(x, 0) = t_0 = const; \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0 = const; \quad (5)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}(0, \tau) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, \tau) = 0; \quad (6)$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t}{\partial x}(R, \tau) + q_q \tau - (1 - \varepsilon) q_m \tau = 0; \quad (7)$$

$$a_m \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x}(R, \tau) + q_m \tau = 0 \quad (8)$$

Здесь

(2) – уравнение теплопереноса с внутренним источником тепла, определяемым зависимостью (1);

(3) – уравнение влагопереноса;

(4) и (5) – начальные условия, заключающиеся в равномерном распределении температуры и влагосодержания в материале в момент начала процесса нагрева;

(6) – условия симметрии;

(7) – граничное условие второго рода, задающее поток теплоты через поверхность тела;

(8) - граничное условие второго рода, описывающее влагообмен тела с окружающей средой.

Аналитическое решение краевой задачи (1) – (8) получено методом интегрального преобразования Лапласа, и распределение полей влагосодержания и температуры в материале имеет следующий безразмерный вид:

$$\Theta(X, Fo) = Ki_m \left[ Fo - \frac{1}{6} (1 - 3X^2) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cos \mu_n X \exp -\mu_n^2 Lu Fo ; \quad (9)$$

$$T(X, Fo) = \Phi(X, Fo) + \frac{2\varepsilon Ko Ki_m}{\pi^2 (1 - Lu)} \cos \pi X \exp -\pi^2 Fo \times \left[ 1 - \exp \pi^2 Fo (1 - Lu) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n^2} \times \quad (10)$$

$$\times \left[ \frac{Ki_q - Ko Ki_m}{1 - R_{np}^2} \frac{\varepsilon + 1 - \varepsilon Lu}{\mu_n^2} + \frac{2Po}{1 - R_{np}^2} \right] \cos \mu_n X \exp -\mu_n^2 Fo$$

где  $\mu_n = n\pi$ ; (11)

$$\Phi(X, Fo) = Fo \left( \frac{Po (1 - 3R_{np}^2) (1 - R_{np}^2) - 3X^2}{3(1 - R_{np}^2)} - \varepsilon Ko Lu + Ki_q \right) + X^2 \left( \frac{1}{2} Ki_q + \frac{Po}{1 - R_{np}^2} - \frac{1 - \varepsilon}{2} Ko Lu Ki_m \right) - \frac{1}{12} \frac{Po}{1 - R_{np}^2} X^4 - (1 - \varepsilon) Ko Lu Ki_m + \frac{\varepsilon}{6} Ko Ki_m - \frac{Po}{180(1 - R_{np}^2)} (7 + 15X^4) .$$

Анализ полученных решений (9) и (10) показывает, что благодаря быстрому увеличению абсолютной величины последовательного ряда значений характеристических корней  $\mu_n$  (11), а, следовательно, быстрого уменьшения экспоненциальных сомножителей  $\exp -\mu_n^2 Fo$  и  $\exp -\mu_n^2 Lu Fo$ , бесконечные суммы, входящие в решения, сходятся достаточно быстро. Поэтому, начиная с определенного значения числа Фурье (или произведения чисел  $Lu$  и  $Fo$ ), с заранее заданной степенью точности из всего разложения, можно удовлетвориться одним-двумя первыми членами. Такое упрощение имеет большое практическое значение из-за существенного сокращения объема расчетной работы и

возможности представления общих решений в удобной для практического применения форме.

Так, формулой, удобной для инженерных расчетов полей потенциала влагопереноса, будет следующее выражение, полученное из (9) при  $n = 1$ :

$$U(X, \tau) = U_0 \left[ 1 - Ki_m \left( 1 - 3X^2 + \frac{2}{\pi^2} \cos \pi X \exp -\pi^2 LuFo \right) \right] \quad (12)$$

Среднее значение безразмерной величины потенциала переноса влаги для упрощенного выражения  $\Theta(X, Fo)$  при  $n = 1$  определяется формулой

$$\Theta(Fo) = \int_0^1 \Theta(X, Fo) dx = \frac{u_0 - \bar{u} \tau}{u_0} = 1 - Ki_m Fo, \quad (13)$$

Откуда легко получается формула расчета времени, необходимого для достижения нагреваемым телом определенного влагосодержания:

$$\tau = \frac{a_m \gamma_0 R (u_0 - \bar{u} \tau)}{a_q q_2} \quad (14)$$

## Выводы

1. Поставлена и решена аналитически задача совместного тепло- и массопереноса при инфракрасном нагреве морской капусты.
2. Полученные решения позволяют рассчитать температурные и влажностные поля в термообрабатываемом материале, усредненные значения соответствующих потенциалов переноса, темп нагрева, расход тепла в процессе нагрева тела, а также получить формулы, удобные для инженерных расчетов температуры и влагосодержания.
3. Разработанные аналитические решения дают возможность определить время, необходимое для достижения нагреваемым продуктом определенной температуры и влагосодержания.

## Обозначения

$t = t(x, \tau)$  - температура °С, К;  $t_0$  - начальная температура;  $t_k$  - конечная необходимая температура материала;  $\Delta t = t_k - t_0$ ;

$T(X, Fo) = \frac{t(x, \tau) - t_0}{\Delta t}$  - безразмерная температура;

$u = u(x, \tau)$  - влагосодержание, кг влаги/кг абс.сух.вещ.;  $u_0$  - начальное влагосодержание;

$$\Theta \quad X, Fo = \frac{u_0 - u(x, \tau)}{u_0} - \text{безразмерное влагосодержание;}$$

$\tau$  - время, с;

$x$  - текущая координата, м;  $R$  - половина толщины пластины;

$$X = \frac{x}{R} - \text{безразмерная координата;}$$

$R = \frac{\lambda_{np}}{R}$ ;  $\lambda_{np}$  - предельная глубина проникновения инфракрасного излучения в материал, м;

$$Fo = \frac{a_q \tau}{R^2} - \text{число Фурье;}$$

$a_q$  - коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;

$\varepsilon$  - критерий фазового превращения;

$\rho$  - удельная теплота фазового превращения, Дж/кг;

$c_q$  - К);

$\gamma_0$  - плотность абсолютно сухого вещества, кг/м<sup>3</sup>;

$a_m$  - коэффициент потенциалопроводности (влагопроводности), м<sup>2</sup>/с;

$w(x)$  - удельная мощность источника тепла, Вт/м<sup>3</sup>,  $w_0$  - начальная мощность (на поверхности тела);

$q_q \tau = q_1$  - плотность теплового потока на поверхности тела, Вт/м<sup>2</sup>

$q_m \tau = q_2$  - плотность потока массы вещества через поверхность тела, кг/(м<sup>2</sup>·с);

$$Lu = \frac{a_m}{a_q} - \text{число Лыкова;}$$

$$Po = \frac{w_0 R^2}{\lambda_q \Delta t} - \text{число Померанцева;}$$

$\lambda_q$  - коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

$$Ko = \frac{\rho u_0}{c_q \Delta t} - \text{число Коссовича.}$$

## Список литературы

1. Гинзбург А.С. Инфракрасная техника в пищевой промышленности. М.: Пищевая промышленность, 1966. – 376 с.
2. Рогов И.А., Некрутман С.В. Сверхвысокочастотный и инфракрасный нагрев пищевых продуктов. – М.: Пищевая пром-сть, 1976. – 210 с.
3. Ильясов С.Г., Красников В.В. Физические основы инфракрасного облучения пищевых продуктов – М.: Пищевая пром-сть, 1978. – 360 с.
4. Гинзбург А.С. Основы теории и техники сушки пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1973. – 528 с.
5. Белобородов В.В., Вороненко Б.А. Решение задачи нагрева тела в электромагнитном поле сверхвысоких частот. // Журнал прикладной химии АН СССР, “Наука” – Ленинградское отделение, №10, 1984. – С. 2276-2982.
6. Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Стариков В.В. Аналитическое решение задачи совместного тепломассопереноса при инфракрасном нагреве колбасных изделий. - Электронный журнал. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2009, №2. – <http://www.open-mechanics.com/journals>.
7. Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Стариков В.В. Постановка задачи тепломассопереноса процесса горячей сушки рыбы // Межвузовский сборник научных трудов “Ресурсосберегающие технологии и оборудование пищ. пром-сти”, СПб., СПбГУНиПТ, 2006. – С. 71-75.
8. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. –М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.