УДК 66.064

Математическое описание мембранного разделения эмульсий

Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Поляков С.В.

valdurtera@rambler.ru

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий

Для прогнозирования процессов разделения эмульсий, выбора оптимальных условий проведения этих процессов необходимы соответствующие математические описания. В связи с этим разработана комбинированная краевая задача для непрерывного процесса конвективной диффузии в пространстве между непроницаемой стенкой и мембраной и молекулярной диффузии в мембране в виде аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений нестационарной диффузии для переноса вещества в движущейся жидкости и в мембране, обеспечивающей из-за своих свойств селективной проницаемости разделение веществ.

Ключевые слова: математическое описание, мембрана, эмульсия, конвективный, молекулярный перенос вещества.

The mathematical description of membrane separation of emulsions

Voronenko B.A., Pelenko V.V., Polyakov S.V.

Saint-Petersburg state university of refrigeration and food engineering

To predict the separation processes of emulsions, the choice of optimal conditions for these processes requires appropriate mathematical descriptions. In this regard, developed a combined value problem for a continuous process of convective diffusion in the space between the wall and an impermeable membrane and the molecular diffusion in the membrane in the form of analytical solutions of the corresponding system of differential equations for unsteady diffusion mass transfer in moving fluid in the membrane and providing for their properties of selective permeability of the separation of substances.

Key words: mathematical description of the membrane, emulsion, convective, molecular mass transfer.

Разделение веществ при помощи полупроницаемых мембран (ультра- и микрофильтрация, обратный осмос) широко применяется в пищевой промышленности, в том числе и при переработке молочных продуктов [1-2].

Мембранные методы разделения эмульсий на компоненты позволяют наиболее экономично решить проблему переработки обезжиренного молока и сыворотки в диетические и десертные пищевые продукты.

Схема разделения растворов (эмульсий) может быть представлена следующим образом: раствор движется между непроницаемой стенкой и полупроницаемой мембраной, на поверхности которой образуется пограничный слой жидкости. От ядра потока отделяемое вещество, например, жировые шарики, переносятся посредством конвективной и молекулярной диффузии через пограничный слой к мембране. Через полупроницаемую мембрану пермеат фильтруется по закону Дарси.

Для прогнозирования процессов разделения эмульсий, выбора оптимальных условий проведения этих процессов необходимы соответствующие математические описания.

В работе [3] решены задачи для пограничного слоя, вблизи которого происходит молекулярный перенос вещества. В [4] разработана математическая модель применительно к ультрафильтрации молочной сыворотки в виде аналитического решения уравнения конвективной диффузии при гармоническом (по координате) начальном распределении концентрации отделяемого белкового продукта.

Количественное описание диффузионных процессов, происходящих в мембране – технологической перегородке, обеспечивающей из-за своих свойств селективной проницаемости разделение веществ в основном без химических превращений – базируется на трех основных подходах: статистическом, термодинамическом и феноменологическом [5-6]. На основе феноменологического подхода некоторые задачи поставлены и решены Н.И. Николаевым [5].

Развитием идей указанных работ может быть соответствующая комбинированная краевая задача для непрерывного процесса конвективной диффузии в пространстве между непроницаемой стенкой и мембраной и молекулярной диффузии в мембране.

Математическое описание исследуемого процесса заключается в решении одномерного уравнения нестационарной диффузии с дрейфом (уравнения конвективной диффузии для переноса вещества в движущейся со скоростью ω жидкости)

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad -1_1 < x < 0, \tau > 0 \qquad (1)$$

при начальном условии

$$c \;\; x,0 \;\; = c_0 = const, \qquad (2)$$

граничном условии первого рода

$$c_1(-l_1, \tau) = c_0, \tag{3}$$

и решении одномерного уравнения нестационарной диффузии в мембране

$$\frac{\partial c_2}{\partial \tau} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l_2, \tau > 0 \tag{4}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$c_2(x, 0) = 0; \tag{5}$$

$$c_1(0, \tau) = c_2(0, \tau); \tag{6}$$

$$-D_1 \frac{\partial c_1(0, \tau)}{\partial x} = -D_2 \frac{\partial c_2(0, \tau)}{\partial x} \tag{7}$$

$$c_2(l_2, \tau) = c_c = const \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$c_i = c_i(x, \tau)$, $i = 1,2$ – концентрация отделяемого вещества в растворе и мембране соответственно; $c_2(x, \tau) = c(x, \tau)$; c_0 – начальная концентрация; c_c – концентрация среды, в которую поступает продиффундированное через мембрану вещество; x – текущая координата, l_1 и $l_2 = \delta$ – толщина слоя жидкости и мембраны соответственно;

τ – время;

D_1 и D_2 – коэффициенты молекулярной диффузии.

Равенство (5) – начальное условие, заключающееся в том, что в момент начала процесса плоская мембрана не содержит диффундирующего вещества; граничные условия четвертого рода (6) и (7) выражают факт равенства концентраций и потоков массы вещества на границе мембраны с раствором.

Граничное условие первого рода (8) отражает тот факт, что продиффундированное через мембрану вещество поступает в достаточно большой объем, не изменяющий концентрации этого вещества c_c, либо быстро отводится от мембраны.

Поставленная краевая задача (1) – (8) решена аналитическим методом интегрального преобразования Лапласа. Распределение концентрации отделяемого вещества в мембране получено в следующем виде:

$$\theta(X, Fo) = \theta_0 - \theta_c X -$$

$$-\frac{\theta_c\left(1 - e^{-Pe}\right) + \theta_0 K_D K_l Pe}{1 - e^{-Pe} + K_D K_l Pe} - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{ctg\mu_m}{\mu_m \varphi_m} * \frac{sin\left(\mu_m (1 - X)\right)}{sin\,\mu_m} e^{-\mu_m^2 Fo} -$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{\mu_n}\right) sin\left(\mu_n X\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \tag{9}$$

где

$\theta\left(X, Fo\right) = \dfrac{c_0 - c\left(x,\tau\right)}{c_0 - c_c}$ - безразмерная концентрация,

$\theta_0 = \dfrac{c_0}{c_0 - c_c}, \theta_c = \dfrac{c_c}{c_0 - c_c};$

$X = \dfrac{x}{\delta}$ - безразмерная координата;

$Fo = \dfrac{D_2\tau}{\delta}$ - число Фурье;

$Pe = \dfrac{\omega l_1}{D_1}$ - число Пекле;

$K_D = \dfrac{D_1}{D_2}; K_l = \dfrac{l_2}{l_1};$

$\mu_n = n\pi;$

μ_m – последовательные положительные корни характеристического уравнения

$$\frac{Pe}{2} + \frac{\gamma_m}{\sqrt{K_D}K_l} cth \frac{\gamma_m}{\sqrt{K_D}K_l} = -\frac{\mu}{K_D K_l} ctg\mu; \tag{10}$$

$$\gamma_m = \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right) K_D K_l^2 - \mu_m^2};$$

$$\varphi_m = \frac{K_D K_l Pe}{2\gamma_m^2}\left(1 + \frac{Pe}{2}\right) - 1 - \frac{\gamma_m}{K_l} + \left(\frac{1}{\gamma_m} + \frac{\mu_m}{\gamma_m^2} + \frac{\mu_m Pe}{\gamma_m^2}\right) ctg\mu_m +$$

$$+\mu_m\left(\frac{\mu_m}{K_D K_l \gamma_m^2} - \sqrt{K_D}\right)$$

Список литературы:

1. Липатов Н.Н., Марьин В.В., Фетисов Е.А. Мембранные методы разделения молока и молочных продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1976. – 168 с.
2. Маннино С. Применение нанотехнологий в пищевой промышленности // Молочная промышленность, № 1, 2010. – С. 40-41.
3. Забровский Г.П., Белобородов В.В., Вороненко Б.А. Общие и частные решения задач при баромембранном разделении растворов // Труды ВНИИ жиров, - СПб.: ВНИИЖ, 1999. – С. 108-114.
4. Алексеев Г.В., Вороненко Б.А., Яковлев А.А. Возможности совершенствования моделирования баромембранных процессов в пищевых

производствах // Краснодар, научн. конф. «Нанотехнологии в пищевой промышленности», 2009.

5. Николаев Н.И. Диффузия в мембранах. – М.: Химия, 1980.-232 с.

6. Дытнерский Ю.И. Мембранные процессы разделения жидких смесей. – М.: Химия, 1975. – 252 с.