УДК 532.5.01

Точные решения модельного уравнения динамики вязкой среды в канале

Зайцев А.В., Кудашов В.Н. zai_@inbox.ru

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики. Институт холода и биотехнологий

Предложено использование уравнения Бюргерса в качестве модельного уравнения при разработке методики численного исследования параметров сходимости и устойчивости разностных схем при расчёте динамики вязкой среды методом сеток. Представлены точные решения приведённого уравнения.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, течение вязкой жидкости, точное решение.

Precise Solutions of a Model Dynamical Equation of the Viscous Medium in the Channel

Zaitsev A.V., Kudashov V.N. zai_@inbox.ru

St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics. Institute of Refrigeration and Biotechnologies

Here is offered the use of Burgers equation as the model equation when developing a technique of numerical research of convergence and stability parameters of difference schemes at calculation of the viscous medium dynamics by the grids method. Here are given precise solutions of the presented equation.

Keywords: Burgers equation, current of viscous fluid, precise decision.

Решение сложной задачи нестационарного течения вязкой жидкости в канале с учётом реальных физических условий, таких, как зависимость теплофизических свойств от температуры, различные гидродинамические режимы течения, наличие объёмных сил и др. сводится к решению системы дифференциальных уравнений, в том числе уравнения Навье-Стокса с известными проблемами существования и гладкости решений. Основным встречающемся в литературных источниках методом решения различных задач при применении уравнений Навье-Стокса является конечно-разностная аппроксимация, например [1]. При этом главной проблемой является достижение устойчивости и сходимости. Известны условия сходимости, полученные для относительно простых задач. Однако при приближении постановки задачи к реальным условиям обеспечить сходимость возможно только в результате численного эксперимента на конкретной модели.

С этой целью предлагается применить методику численного исследования параметров сходимости и устойчивости выбираемых разностных схем. Для разработки такой методики следует иметь некое модельное уравнение и иметь его точное решение. Далее в качестве такого уравнения предлагается использовать уравнение Бюргерса, близкое по своему виду к стандартным уравнениям гидрогазодинамики.

Запишем уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu > 0. \tag{1}$$

Здесь аналогами физических величин и функций процесса динамики вязких сред являются: u – скорость потока; t – время; x – координата вдоль потока; μ – вязкость.

Мы хотим построить решения уравнения Бюргерса при $x \in [0, L]$, $t \in [0, \infty)$, с граничными условиями

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{2}$$

Для построения таких решений воспользуемся преобразованием Коула-Хопфа [2], сводящее нелинейное уравнение (1) к уравнению теплопроводности, являющееся линейным.

Пусть функция $v(x,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Тогда функция

$$u = -2\mu\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению Бюргерса. Преобразование (4) называется преобразованием Коула-Хопфа.

Чтобы найти решения уравнения с граничными условиями (2), как видно из (4), достаточно найти функцию $v(x,t)$, при $x \in [0,L]$, $t \in [0,\infty)$, удовлетворяющую уравнению (3) и граничным условиям

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{5}$$

При этом необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$v(x,t) \neq 0, \quad x \in [0,L],\ t \in [0,\infty). \tag{6}$$

Используя метод Фурье (см. [3]) нетрудно видеть, что существует счётное множество функций, удовлетворяющих уравнению (3) и граничным условиям (5):

$$v_n(x,t) = \mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, n = 1,2,\ldots. \tag{7}$$

Так как $|v_n(x,t)| \leq 1$ при $t \geq 0$, то функции

$$\tilde{v}_n(x,t) = v_n(x,t) + C, \tag{8}$$

являются решениями уравнения (3) с граничными условиями (5). Неравенство (6) очевидно выполнено, если константа $C > 1$.

Так как $\partial v_n/\partial x = -\lambda_n \mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x)$, то из (4) получаем требуемые функции

$$u_n(x,t) = \frac{2\mu\lambda_n \mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x)}{\mathrm{e}^{-\mu\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) + C}.$$

Перепишем их в виде

$$u_n(x,t) = \frac{2\mu\lambda_n \sin(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n x) + C\mathrm{e}^{\mu\lambda_n^2 t}}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, n = 1,2,\ldots. \tag{9}$$

Заметим, что n-ая функция имеет ровно $n-1$ корней внутри интервала $(0,L)$.

На рис. 1, 2 приведены графики первых двух функций распределения величин u_1 и u_2 вдоль координаты x в различные моменты времени при $\mu = 0{,}1$, $C = 1{,}5$.

Таким образом, в дальнейшем развитие методики численного исследования сходимости и устойчивости может быть основано на использовании для построения разностной модели исходного уравнения (1) с граничными условиями (2), а получаемое сеточное решение может оцениваться в сравнении с точным решением (9).

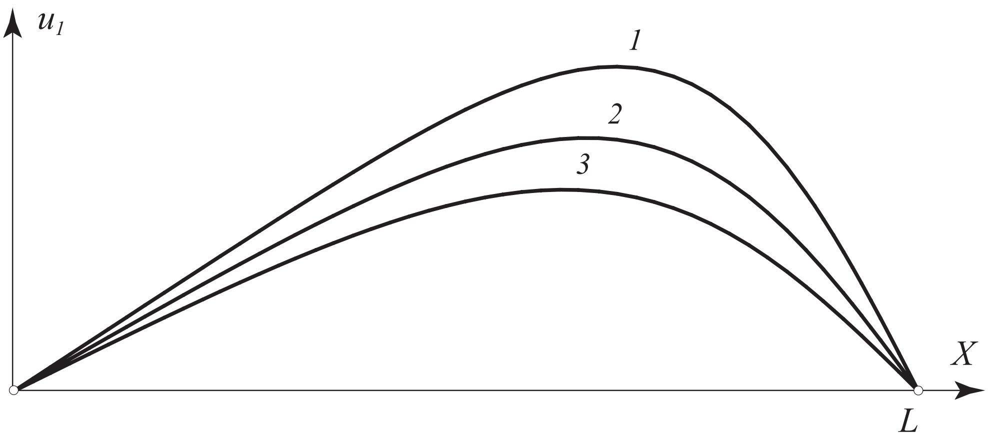

Рис. 1. Распределение u_1 вдоль x:
$1 - t = 0{,}3$; $2 - t = 0{,}5$; $3 - t = 0{,}7$

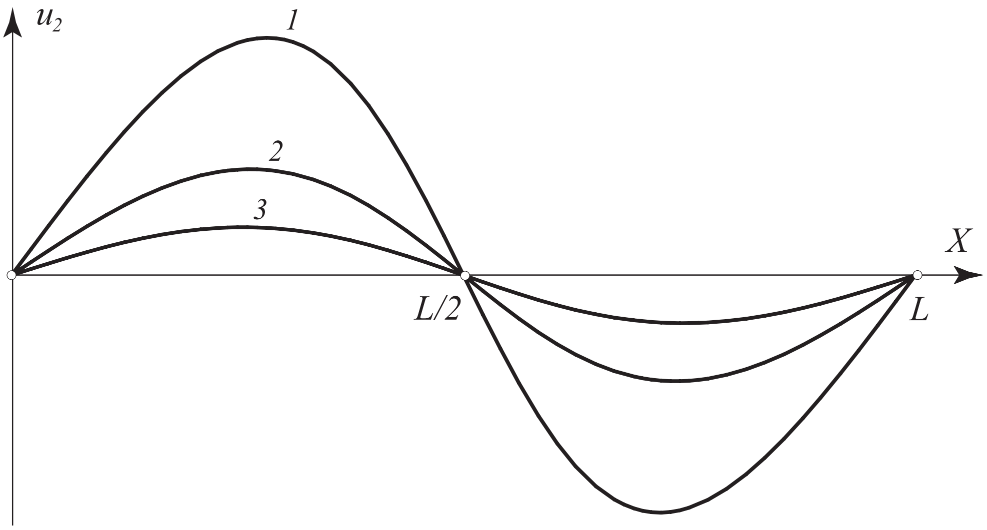

Рис. 2. Распределение u_2 вдоль x:
$1 - t = 0{,}3$; $2 - t = 0{,}5$; $3 - t = 0{,}7$

Список литературы

[1] Зайцев А.В., Пеленко Ф.В. *Моделирование течения вязкой жидкости в трубе* // Научный журнал СПбГУНиПТ. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств (электронный журнал) / СПбГУНиПТ. - № 1. - Март. 2012. Режим доступа к журн.: http://processes.open-mechanics.com/journals свободный.

[2] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*: Пер. с англ. / Под. ред А.Б. Шабата. — М.: Мир, 1977. - 622 с.

[3] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*: — М.: Наука, 1988. – 512 с.